

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Σεπτέμβριος 2013

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η διάρκεια των εξετάσεων είναι τρεις ώρες. Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα (2 μονάδες το καθένα). Καλή Επιτυχία.

Θέμα 1 : α) Αν $x, y \in \mathbb{R}^n$ είναι ορθογώνια μεταξύ των με $\|x\|_2 = \|y\|_2$, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $2x + y$ και $x - 2y$ είναι ορθογώνια μεταξύ των.

β) Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι συμμετρικοί πίνακες, να αποδείξετε ότι ο πίνακας $AB + BA$ είναι συμμετρικός.

Θέμα 2 : Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ και $b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση και να συγκριθούν μεταξύ των οι μέθοδοι Jacobi, Gauss-Seidel, η βέλτιστη SOR και η βέλτιστη μέθοδος παρεμβολής της Gauss-Seidel.

Θέμα 3 : Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Αφού αποδείξετε ότι ο A είναι θετικά ορισμένος, να λύσετε το σύστημα με τη μέθοδο συζυγών κλίσεων με αρχικό διάνυσμα $x^{(0)} = 0$. (Να διατηρείτε κλάσματα κατά τους υπολογισμούς.)

Θέμα 4 : Να λυθεί το γραμμικό πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων $\min_x \|b - Ax\|_2$, με $A =$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ και } b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ με το σύστημα των κανονικών εξισώσεων και με την QR}$$

ανάλυση χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Gram-Schmidt ορθογωνοποίησης. Στη συνέχεια, να βρεθεί η τιμή $\min_x \|b - Ax\|_2$. (Να γίνουν ακριβείς πράξεις με ριζικά και κλάσματα στους υπολογισμούς.)

Θέμα 5 : Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των αντίστρο-

φων δυνάμεων με τον αλγόριθμο της $\|\cdot\|_\infty$ και με αρχικό διάνυσμα $x^{(0)} = (1 \ 0 \ 1)^T$, να γίνουν δυο επαναλήψεις για την προσέγγιση της μικρότερης απόλυτα ιδιοτιμής και του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος. Η λύση των συστημάτων να γίνει με την LU παραγοντοποίηση. (Να γίνουν ακριβείς πράξεις με κλάσματα στους υπολογισμούς.)